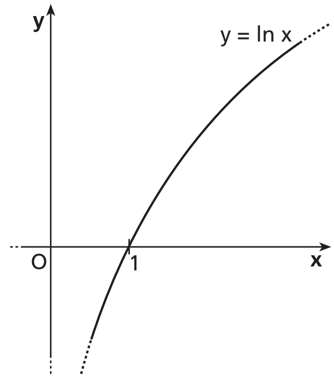
PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \ln x$ (logaritmo naturale).

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D.
4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

PROBLEMA 2

La funzione $f(x) = \ln x$ ha dominio $D =]0; +\infty[$, interseca l'asse x nel punto di coordinate (1; 0) ed è sempre crescente. Il corrispondente grafico G_f di f è riportato in figura 7.



▲ **Figura 7.**

1. Consideriamo un punto generico di G_f, $P(k; \ln k)$, con $k > 0$; tracciamo per esso la tangente t alla curva che interseca l'asse y nel punto A e la retta parallela all'asse x che interseca l'asse delle ordinate nel punto B; tale punto ha coordinate $B\,(0; \ln k)$ (figura 8).

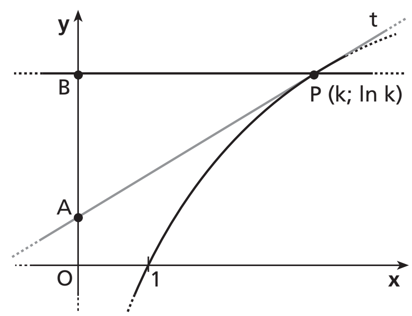
Per determinare le coordinate di A, scriviamo l'equazione della retta t, che ha coefficiente angolare $f(x_P) = \dfrac{1}{k}$.

Quindi, l'equazione della retta t è:

$$y - y_P = f'(x_P)(x - x_P) \to y - \ln k = \frac{1}{k}(x - k) \to$$
$$y = \frac{1}{k}x + \ln k - 1.$$

Tale retta interseca l'asse y in $A(0; \ln k - 1)$, e la lunghezza del segmento AB è:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\ln k - \ln k + 1| = 1,$$



▶ **Figura 8.**

che, perciò, è costante.
Nel caso in cui la funzione considerata sia $g(x) = \log_a x$, si può procedere in modo analogo, trovando:

$g'(x_P) = \dfrac{1}{k}\log_a k$, coefficiente angolare della retta tangente nel punto P,

$y = \dfrac{1}{k}\log_a e \cdot x + \log_a e$, equazione della retta tangente t,

$A(0; \log_a k - \log_a e)$, $B(0; \log_a k)$.

La distanza tra A e B è ora:

$$\overline{AB} = |\log_a k - \log_a k + \log_a e| = |\log_a e|.$$

Possiamo concludere che, fissato il valore della base a del logaritmo, la lunghezza di AB rimane costante indipendentemente dalla scelta del punto P.
Osserviamo infine che, per $a = e$, ritroviamo il caso particolare $\overline{AB} = 1$.

2. Poiché per inclinazione si intende l'angolo che una retta forma col semiasse positivo delle x, si ha che il coefficiente angolare della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1è tg δ. Tale coefficiente corrisponde al valore della derivata prima della funzione calcolata nel punto $x = 1$:

$$g'(1) = \log_a e \quad \to \quad \text{tg}\,\delta = \log_a e.$$

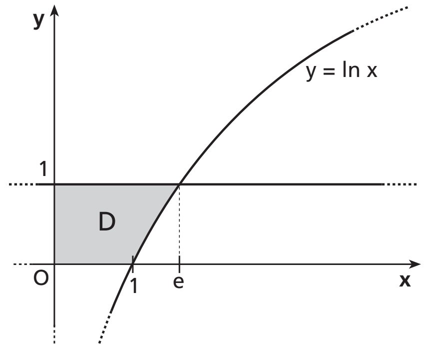
- Se $\delta = 45°$, allora tg $\delta = 1$. Quindi $1 = \log_a e$, cioè $a = e$ e il logaritmo risulta naturale;
- se $\delta = 135°$, allora tg $\delta = 1$. Quindi: $-1 = \log_a e$, cioè $a = \dfrac{1}{e}$.

3. La regione D di cui calcolare l'area $A(D)$ è evidenziata nella figura 9.
Determiniamo tale superficie come differenza tra l'area del rettangolo di base e e altezza 1 e l'area sottesa dalla funzione $f(x) = \ln x$ per $1 \leq x \leq e$:

$$A(D) = e \cdot 1 - \int_1^e \ln x \, dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$= e - [x \ln x - x]_1^e = e - (e - e + 1) = e - 1.$$

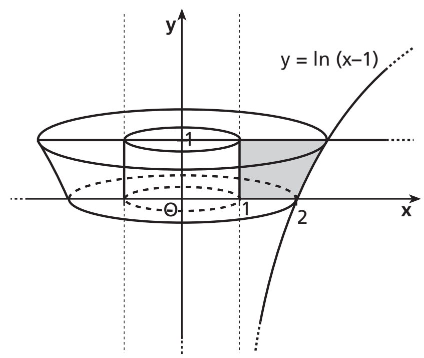


▶ **Figura 9.**

4. Operiamo sulla funzione f la traslazione di vettore $\vec{v}\ (1;0)$ in modo che l'asse di rotazione coincida con l'asse y. La curva traslata ha equazione $y = \ln(x - 1)$ (figura 10).
Per calcolare il volume di rotazione della funzione $y = \ln(x - 1)$ intorno all'asse y, è necessario determinare l'equazione della funzione inversa:

$$y = \ln(x - 1) \quad \rightarrow \quad e^y = x - 1 \quad \rightarrow \quad x = e^y + 1.$$

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume del solido di rotazione il volume del cilindro interno di raggio di base 1 e altezza 1:



▲ **Figura 10.**

$$V = \pi \int_0^1 (e^y + 1)^2 \, dy - \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \int_0^1 (e^{2y} + 1 + 2e^y) dy - \pi = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} + y + 2e^y \right]_0^1 - \pi =$$

$$= \pi \left(\frac{e^2}{2} + 1 + 2e - \frac{1}{2} - 2 - 1 \right) = \pi \left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{5}{2} \right) = \frac{\pi}{2}(e^2 + 4e - 5).$$