

■ **PROBLEMA 2**

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  determinate da  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = ax^2$ , essendo  $a$  un parametro reale e il logaritmo di base  $e$ .

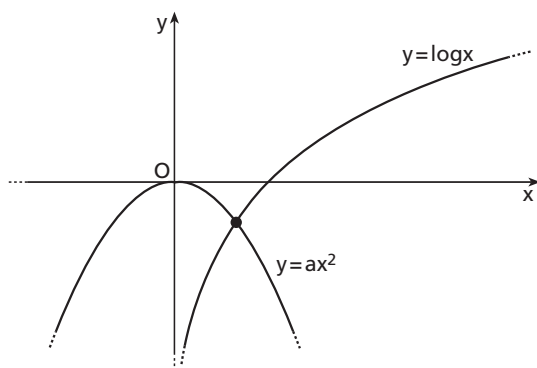
1. Si discuta, al variare di  $a$ , l'equazione  $\log x = ax^2$  e si dica, in particolare, per quale valore di  $a$  i grafici di  $f$  e  $g$  sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto  $a = 1$ , l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni  $f$  e  $g$  e dalle rette  $x = 1$  e  $x = 2$ .
3. Si studi la funzione  $h(x) = \log x - ax^2$  scegliendo per  $a$  un valore numerico maggiore di  $\frac{1}{2e}$  e se ne disegni il grafico.

**PROBLEMA 2**

**1. Primo metodo**

Si discute l'equazione  $\log x = ax^2$  con metodo grafico ponendo  $y = \log x$  e  $y = ax^2$  e determinando gli eventuali punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni, al variare di  $a$ .

- $a < 0$ . La funzione  $y = ax^2$  è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso il basso (figura 5).



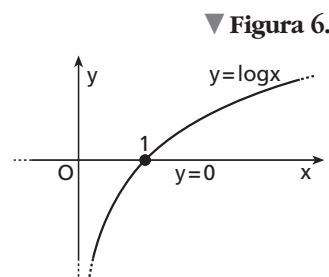
◀ Figura 5.

Si ha sempre un solo punto di intersezione.

- $a = 0$ . La funzione  $y = ax^2$  diventa  $y = 0$ .

In questo caso (figura 6) il punto di intersezione ha coordinate  $(1; 0)$  e la soluzione dell'equazione è quindi  $x = 1$ .

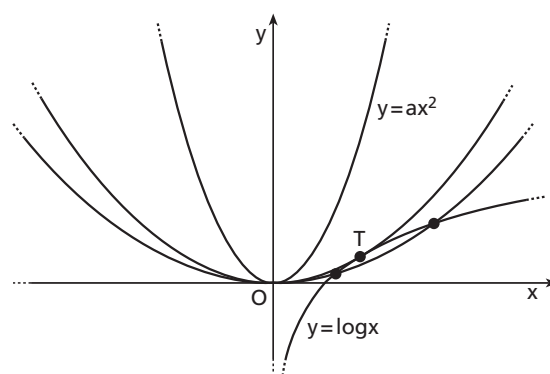
- $a > 0$ . La funzione  $y = ax^2$  è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso l'alto.



▼ Figura 6.

Ci sono tre possibilità al variare di  $a$  (figura 7):

- abbiamo parabole che intersecano il grafico di  $y = \log x$  in due punti distinti;
- esiste una parabola tangente;
- ci sono parabole che non intersecano mai il grafico di  $y = \log x$ .



► Figura 7.

Determiniamo la parabola tangente. Risulta:

$$\begin{cases} ax^2 = \log x & \text{le due curve devono intersecarsi} \\ D(ax^2) = D(\log x) & \text{le due curve devono avere la stessa tangente nel punto comune} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 = \log x \\ 2ax = \frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \frac{1}{2} \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{e} \\ a = \frac{1}{2e} \end{cases}$$

La parabola tangente ha quindi equazione  $y = \frac{1}{2e}x^2$  e il punto di tangenza  $T$  ha coordinate  $(\sqrt{e}; \frac{1}{2})$ .

Riassumendo la discussione dell'equazione  $\log x = ax^2$ , risulta:

- per  $a \leq 0$ , 1 soluzione;
- per  $0 < a < \frac{1}{2e}$ , 2 soluzioni distinte;
- per  $a = \frac{1}{2e}$ , 2 soluzioni coincidenti;
- per  $a > \frac{1}{2e}$ , nessuna soluzione.

### Secondo metodo

Le eventuali soluzioni dell'equazione  $\log x = ax^2$  sono gli zeri della funzione  $b(x) = \log x - ax^2$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ , che risulta continua nel suo campo di esistenza  $D = ]0; +\infty[$ .

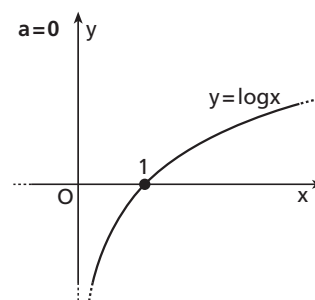
Osserviamo che per  $a = 0$  si ottiene la nota funzione logaritmica che ha un unico zero in  $x = 1$  (figura 8).

Sia ora  $a \neq 0$  e studiamo l'andamento della funzione agli estremi del campo di esistenza.

Vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b(x) = -\infty \quad \text{per ogni valore di } a,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 0 \\ -\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$$



▲ Figura 8.

Trattiamo separatamente i casi  $a < 0$  e  $a > 0$ .

- **$a < 0$ .** Dallo studio dei limiti effettuato, deduciamo che esistono  $x_1, x_2 \in D$  tali che  $f(x_1) < 0$  e  $f(x_2) > 0$ . Per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto nell'intervallo  $]x_1; x_2[$  in cui la funzione si annulla. D'altra parte, risulta:

$$b'(x) = \frac{1}{x} - 2ax > 0, \quad \text{per } x \in D,$$

quindi la funzione è strettamente crescente. Pertanto anche nel caso  $a < 0$  l'equazione  $\log x = ax^2$  ha un'unica soluzione.

- **$a > 0$ .** In questo caso i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi. Studiamo il segno della derivata prima  $b'(x) = \frac{1 - 2ax^2}{x}$  in  $D$ . Risulta:

$$b'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2ax^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{2a}}.$$

Poiché il massimo della funzione è assunto in  $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ , l'esistenza degli zeri di  $b$  dipende dal segno di tale massimo. Calcoliamo l'immagine:

$$b\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \log \sqrt{\frac{1}{2a}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\log 2a + 1).$$

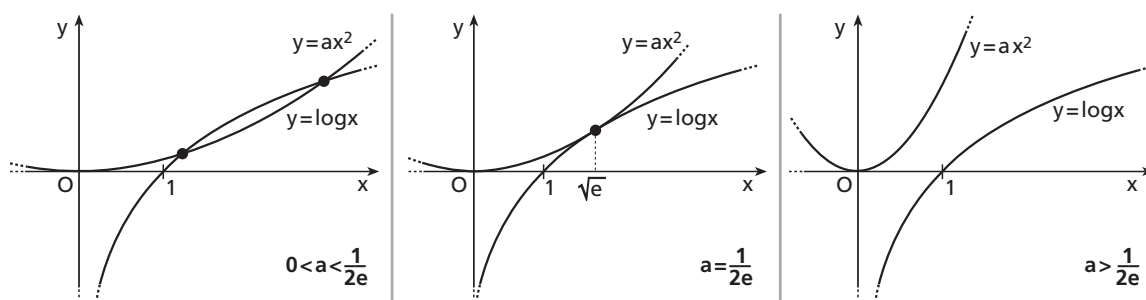
Studiamo la disequazione:

$$b\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log 2a + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \frac{1}{2e}.$$

In conclusione:

- $0 < a < \frac{1}{2e}$ : il massimo di  $b$  è positivo, i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi ed esiste un solo punto critico; quindi la funzione  $b(x)$  ammette due zeri;
- $a = \frac{1}{2e}$ : il massimo di  $b$  è zero ed esiste un solo punto critico, pertanto l'ascissa di tale massimo è l'unica soluzione dell'equazione assegnata dal problema;
- $a > \frac{1}{2e}$ : poiché  $\max b < 0$ , non esistono soluzioni di  $b(x) = 0$ .

Gli zeri dell'equazione  $\log x = ax^2$  possono essere interpretati graficamente come le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici di  $f(x)$  e  $g(x)$ , come mostra la figura 9.



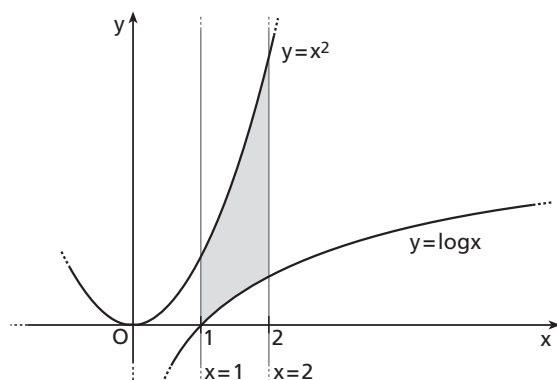
▲ Figura 9.

I grafici di  $f$  e  $g$  sono tangenti solo per  $a = \frac{1}{2e}$ . Infatti le due curve sono tangenti se e solo se si intersecano e hanno la stessa retta tangente nel punto di intersezione. Algebricamente, questo equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g'(x) = f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \frac{1}{2} \\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se  $x = \sqrt{e}$  e  $a = \frac{1}{2e}$ .

2. Dobbiamo determinare l'area  $\mathcal{A}$  evidenziata in figura 10, dove si considera  $a = 1$  come richiesto.

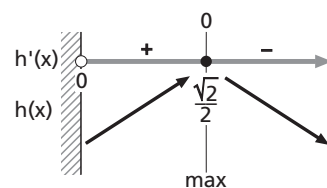


◀ Figura 10.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^2 (x^2 - \log x) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 - \left( [x \log x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{7}{3} - (2 \log 2 - [x]_1^2) = \\ &= \frac{10}{3} - 2 \log 2.\end{aligned}$$

3. Scegliamo  $a = 1$  e studiamo la funzione  $b(x) = \log x - x^2$ . Per quanto visto nei punti precedenti:

- il campo di esistenza è  $D = ]0; +\infty[$ ;
- non esistono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione è sempre negativa perché il massimo è negativo;
- i limiti agli estremi di  $D$  sono entrambi  $-\infty$ ;
- $f'(x) = \frac{1-2x^2}{x}$ , la funzione è crescente in  $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ , decrescente in  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$  e  $\max_{x \in D} b(x) = b\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1)$ , come riassunto nella figura 11.



▲ Figura 11.

Osserviamo che non vi sono asintoti obliqui perché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{x} = -\infty$ .

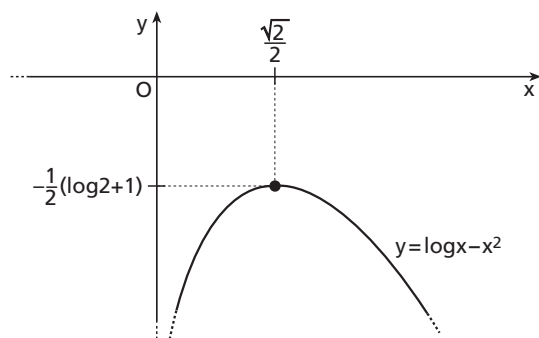
Rimane ora da studiare la derivata seconda:

$$b''(x) = \frac{-4x \cdot x - (1 - 2x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 1}{x^2}.$$

Risulta quindi:

$$b''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x^2 + 1) \geq 0$$

e questa disequazione non è mai soddisfatta. Pertanto la derivata seconda è sempre negativa e la funzione ha la concavità rivolta verso il basso in tutto il campo di esistenza. Il grafico della funzione è riportato nella figura 12.



◀ Figura 12.